

Đối tượng dự thi: **K52-A₁T**
Thời gian làm bài: **120 phút**
Đề số 2

Câu 1. (2 điểm)

(a) Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+5}{n+1} = 3$.

(b) Tìm giới hạn trên, giới hạn dưới của dãy

$$x_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

Câu 2. (2 điểm)

(a) Dùng định nghĩa giới hạn của hàm số chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x) = 2$.

(b) Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

Câu 3. (1 điểm) Cho hàm $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là một hàm liên tục và tăng. Đặt $x_1 = 1$ và $x_n = f(x_{n-1})$ với $n = 2, 3, \dots$. Chứng minh rằng tồn tại giới hạn $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ và $a = f(a)$.

Câu 4. (2 điểm) Xét tính liên tục đều của hàm số

$$f(x) = \left(\sin(\sin \sqrt{x}) \right)^2$$

trên $A = [0, +\infty)$.

Câu 5. (2 điểm) Giả sử hàm số $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ là liên tục đều. Chứng minh rằng nếu $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy thì $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ cũng là dãy Cauchy.

Câu 6. (1 điểm) Thí sinh chọn một trong hai câu (a) hoặc (b) dưới đây

(a) Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $x_1 > 0$ và $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2}$ với $n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nx_n^2 = 1.$$

(b) Chỉ ra các hàm f, g và các hằng số a, A, B sao cho

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$$

nhưng

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) \neq B.$$

Ghi chú:

1. Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu.
2. Cán bộ coi thi không cần giải thích gì thêm.