TÓM TẮT

Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng được nghiên cứu đầu tiên trong các công trình của Euler, d'Alembert, Lagrange và Laplace như là một công cụ chính để mô tả cơ học cũng như mô hình giải tích của vật lý. Vào giữa thế kỷ XIX với sự xuất hiện của các công trình của Riemann, lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng đã chứng tỏ là một công cụ thiết yếu của nhiều ngành toán học. Cuối thế kỷ này, H. Poincaré đã chỉ ra mối quan hệ biện chứng giữa lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng và các ngành toán học khác. Sang thế kỷ XX, lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng phát triển vô cùng mạnh mẽ nhờ có công cụ giải tích hàm đặc biệt là từ khi xuất hiện lý thuyết hàm suy rộng do S.L. Sobolev và L. Schwartz xây dựng.

Không dừng lại ở việc nghiên cứu định tính hoặc định lượng các bài toán phương trình vi phân đạo hàm riêng cụ thể, lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng còn nghiên cứu trên phương diện giải tích các mô hình trong sinh học, trong kinh tế, trong hoá học và vật lý thiên văn mà ví dụ tiêu biểu là mô hình khuyếch tán trong sinh học và trong hoá học.

Khi xét một bài toán phương trình đạo hàm riêng (có thể đó là bài toán biên, bài toán điều kiện ban đầu, bài toán điều kiện hỗn hợp,..) ta thường gặp những khả năng khác nhau về nghiệm của nó nhưng nhìn chung các vấn đề đặt ra đối với nghiệm của một bài toán là

- ⋆ sự tồn tại nghiệm của bài toán;
- ⋆ tính duy nhất nghiệm;
- ⋆ tính trơn của nghiệm.

Mô hình đơn giản nhất của bài toán khuyếch tán có dạng

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \quad , \quad t > 0, \tag{1}$$

ở đây $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, D là ma trận $N \times N$ và $\mathbf{f}$ là một hàm trơn. Khi đó nghiệm bền vững (không phụ thuộc vào thời gian) của bài toán trong trường hợp

hai chiều với ma trận

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dẫn chúng ta đến việc nghiên cứu bài toán phương trình đạo hàm riêng cho hệ elliptic nửa tuyến tính với phần chính là toán tử Laplace sau đây

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + \delta v + f\left(u, v\right) \text{ trong } \Omega, \\ -\Delta v &= \theta u + \gamma v + g\left(u, v\right) \text{ trong } \Omega, \\ u &= v = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ là miền bị chặn với biên trơn.

Vì vậy, trong Luận văn này chúng tôi tập trung nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán trên.

Luận văn bao gồm 3 chương chính sau đây

1. **Chương 1**
   Chương 1 dành để trình bày một số kiến thức chuẩn bị về các không gian Sobolev, các tính chất định tính của toán tử Laplace, nguyên lý cực đại mạnh,...

2. **Chương 2**
   Mục đích chính của chương là chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của bài toán (2) với điều kiện $f, g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz theo u, v; nghĩa là

$$\begin{aligned} |f(u,v) - f(\widetilde{u},\widetilde{v})| &\leq k_1(|u-\widetilde{u}| + |v-\widetilde{v}|), \\ |g(u,v) - g(\widetilde{u},\widetilde{v})| &\leq k_2(|u-\widetilde{u}| + |v-\widetilde{v}|), \end{aligned}$$

   đúng với mọi $u, \widetilde{u}, v, \widetilde{v} \in \mathbb{R}$.

   Phương pháp sử dụng ở đây là phương pháp Lyapunov-Schmidt. Ý tưởng ở đây là sử dụng phân tích tổng trực tiếp

$$H_0^1(\Omega) = X \oplus Y$$

trong đó X là không gian một chiều sinh bởi hàm riêng ứng với giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$. Với phân tích trên ta quy về xét tính giải được của hệ

$$\begin{aligned} u_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\lambda(u_0+z)+\delta(v_0+w)+f(u_0+z,v_0+w)],\\ v_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\theta(u_0+z)+\gamma(v_0+w)+g(u_0+z,v_0+w)], \end{aligned} \tag{3}$$

và của hệ

$$\begin{aligned} z &= Q(-\Delta)^{-1}[\lambda(u_0+z)+\delta(v_0+w)+f(u_0+z,v_0+w)],\\ w &= Q(-\Delta)^{-1}[\theta(u_0+z)+\gamma(v_0+w)+g(u_0+z,v_0+w)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Trong đó P và Q lần lượt là các phép chiếu từ $H_0^1(\Omega)$ lên X và Y.

Với mỗi $(u_0,v_0)\in X\times X$ cố định, ta giải bài toán (4) và giả sử nghiệm nhận được là $(z_0,w_0)\in Y\times Y$. Thay nghiệm vừa tìm được vào bài toán (3) để giải và giả sử nghiệm tìm được của bài toán (3) là (u_0,v_0). Khi đó nghiệm của bài toán (2) sẽ là (u_0+z_0,v_0+w_0).

Kết hợp với nguyên lý ánh xạ co, chúng tôi chỉ ra được rằng với mỗi $(u_0,v_0)\in X\times X$ cố định, hệ (4) có nghiệm duy nhất nếu

$$(|\lambda|+k_1)^2+(|\delta|+k_1)^2+(|\theta|+k_2)^2+(|\gamma|+k_2)^2\le\lambda_2^2.$$

Nếu

$$(|\lambda|+k_1)^2+(|\delta|+k_1)^2+(|\theta|+k_2)^2+(|\gamma|+k_2)^2\le\frac{\lambda_2^2}{2}$$

và

$$\frac{4(k_1^2+k_2^2)((\lambda_1-\lambda)^2+(\lambda_1-\gamma)^2+\theta^2+\delta^2)}{((\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta)^2}\Big(1+\frac{4(k_1^2+k_2^2)}{\lambda_2^2-2l}\Big)<1$$

thì bài toán (3) có nghiệm duy nhất trong $X\times X$.

Cũng phải nhấn mạnh ở đây rằng trong trường hợp đang xét λ_1 không phải là giá trị riêng của ma trận thực A. Đây là kết quả mới và đã được tác giả công bố ở *Electron. J. Diff. Eqns.*, **129** (2005), 1-11.

3. **Chương 3**

   Bài toán được đề cập trong chương 3 là

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= \lambda u + \delta v + f(\mathbf{x}, u, v) \text{ trong } \Omega, \\
-\Delta v &= \delta u + \gamma v + g(\mathbf{x}, u, v) \text{ trong } \Omega, \\
u &= v = 0 \text{ trên } \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{5}$$

   ở đây f và g là các hàm Carathéodory thỏa mãn

$$|f(\mathbf{x}, u, v)| + |g(\mathbf{x}, u, v)| \leqslant a(|u| + |v|)^{\sigma} + b \tag{6}$$

   trong đó $a, b > 0$, σ là các hằng số nào đó với

$$0 \quad \leq \sigma \quad \begin{cases} \leq \dfrac{N+2}{N-2}, & \text{nếu } N \geq 3, \\ < +\infty, & \text{nếu } N = 1, 2. \end{cases}$$

   Khác với chương 2, chúng tôi không giả thiết tính Lipschitz đối với f và g tuy nhiên lại cần sự tồn tại hàm F sao cho

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}, u, v) &= \frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u, v), \\
g(\mathbf{x}, u, v) &= \frac{\partial F}{\partial v}(\mathbf{x}, u, v).
\end{aligned}$$

   và

$$\lim_{|\mathbf{U}| \to +\infty} \frac{\nabla F(x, \mathbf{U})}{|\mathbf{U}|} = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{U} \in \mathbb{R}^2 \tag{7}$$

   đúng với mọi $\mathbf{x} \in \Omega$.

   Với điều kiện (6), phiếm hàm liên kết

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \Big(|\nabla u(\mathbf{x})|^2 + |\nabla v(\mathbf{x})|^2 - \lambda u(\mathbf{x})^2 - 2\delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) - \gamma v(\mathbf{x})^2 \Big) \, \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{U}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

   thuộc lớp C^1. Nghiệm của bài toán (theo nghĩa yếu) là điểm tới hạn của phiếm hàm liên kết trên.

   Với điều kiện (7) và

$$\frac{\lambda + \gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda - \gamma}{2}\right)^2 + \delta^2} \neq \lambda_j \quad , \quad \forall j$$

trong đó λ_j $(j \geq 1)$ là tất cả các giá trị riêng của toán tử $-\Delta$ trong miền Ω, chúng tôi chứng minh được phiếm hàm liên kết thỏa mãn điều kiện Palais-Smale.

Bằng cách áp dụng trực tiếp định lý điểm yên ngựa chúng tôi chỉ ra được sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (5).

Ngoài hai chương chính đã nói ở trên, Luận văn còn bao gồm những phần phụ nữa như là *Mở đầu, Lời cảm ơn, Danh mục các ký hiệu, Mục lục,...*

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại *Khoa Toán-Cơ-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội* dưới sự hướng dẫn trực tiếp của **PGS.TS. Hoàng Quốc Toàn**.