2

Phương pháp Lyapunov-Schmidt và hệ phương trình elliptic cấp hai nửa tuyến tính trong miền bị chặn với phần chính là toán tử Laplace

Trong chương này chúng tôi trình bày các kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán biên Dirichlet sau đây

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \lambda u + \delta v + f(u,v) \text{ trong } \Omega,\\
-\Delta v &= \theta u + \gamma v + g(u,v) \text{ trong } \Omega,\\
u &= v = 0 \text{ trên } \partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ là miền bị chặn với biên trơn,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \delta \\ \theta & \gamma \end{pmatrix}$$

là ma trận các số thực, $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz theo u, v; nghĩa là

$$
\begin{aligned}
|f(u,v) - f(\widetilde{u},\widetilde{v})| &\leq k_1(|u-\widetilde{u}| + |v-\widetilde{v}|),\\
|g(u,v) - g(\widetilde{u},\widetilde{v})| &\leq k_2(|u-\widetilde{u}| + |v-\widetilde{v}|),
\end{aligned}
$$

đúng với mọi $u, \widetilde{u}, v, \widetilde{v} \in \mathbb{R}$.

Đây là kết quả đã được tác giả công bố trong bài báo: An application of the Lyapunov-Schmidt method to semilinear elliptic problems, *Electron. J. Diff. Eqns.*, **129** (2005), 1-11.

2.1 Một số ký hiệu

Để đơn giản về mặt ký hiệu chúng ta sẽ sử dụng $|\cdot|_2$ để ký hiệu chuẩn trong không gian $L^2(\Omega)$ hoặc chuẩn trong không gian $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Nghiệm của bài toán (2.1)

Chúng ta nói rằng $U \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ là nghiệm của (2.1) nếu

$$U = (-\Delta)^{-1}(AU + G(U)), \tag{2.2}$$

ở đây $G(U) = (f(u,v), g(u,v))$. Rõ ràng toán tử $(-\Delta)^{-1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ là tuyến tính, tự liên hợp, liên tục và là song ánh. Hơn nữa, phép nhúng $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$ là compắc, do đó toán tử $(-\Delta)^{-1} : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ cũng compắc, tự liên hợp và đơn ánh. Vậy toán tử xác định từ vế phải của (2.2) cũng compắc.

2.2 Phương pháp Lyapunov-Schmidt

Ký hiệu X là không gian con một chiều của $H_0^1(\Omega)$ sinh bởi hàm φ_1, tức là $X = \{t\varphi_1 : t \in \mathbb{R}\}$. Ký hiệu $Y = X^\perp = \langle \varphi_1 \rangle^\perp$. Khi đó ta có thể viết

$$H_0^1(\Omega) = X \oplus Y.$$

Và do đó với mọi $U = (u,v) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ ta có biểu diễn

$$u = u_0 + z, u_0 \in X, z \in Y,$$
$$v = v_0 + w, v_0 \in X, w \in Y,$$

ở đây $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Ký hiệu P và Q lần lượt là các phép chiếu lên X and Y. Khi đó chiếu 2 vế của (2.2) ta nhận được

$$\begin{aligned} u_0 &= P(-\varDelta)^{-1}[\lambda(u_0+z)+\delta(v_0+w)+f(u_0+z,v_0+w)], \\ v_0 &= P(-\varDelta)^{-1}[\theta(u_0+z)+\gamma(v_0+w)+g(u_0+z,v_0+w)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

và

$$\begin{aligned} z &= Q(-\varDelta)^{-1}[\lambda(u_0+z)+\delta(v_0+w)+f(u_0+z,v_0+w)], \\ w &= Q(-\varDelta)^{-1}[\theta(u_0+z)+\gamma(v_0+w)+g(u_0+z,v_0+w)]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Với mỗi $(u_0, v_0) \in X \times X$ cố định, ta giải bài toán (2.4) và giả sử nghiệm nhận được là $(z_0, w_0) \in Y \times Y$. Thay nghiệm vừa tìm được vào bài toán (2.3) để giải và giả sử nghiệm tìm được của bài toán (2.3) là (u_0, v_0). Khi đó nghiệm của bài toán (2.1) sẽ là $(u_0 + z_0, v_0 + w_0)$.

2.3 Một trường hợp riêng của bài toán (2.1)

Trong mục này, chúng ta sẽ một trường hợp đặc biệt của bài toán (2.1), cụ thể chúng ta xét khi $\gamma = \lambda = \lambda_1$, $k_1 = k_2 = k$ và $\delta = \theta > 0$, nghĩa là

$$\begin{aligned} -\varDelta u &= \lambda_1 u + \delta v + f(u,v) \quad \text{in } \varOmega, \\ -\varDelta v &= \delta u + \lambda_1 v + g(u,v) \quad \text{in } \varOmega, \\ u &= v = 0 \quad \text{on } \partial\varOmega, \end{aligned} \tag{2.5}$$

ở đây λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\varDelta$. Bằng cách áp dụng phương pháp Lyapunov-Schmidt ta đưa về việc xét hai bài toán phụ sau đây

$$\begin{aligned} u_0 &= P(-\varDelta)^{-1}[\lambda_1(u_0+z)+\delta(v_0+w)+f(u_0+z,v_0+w)], \\ v_0 &= P(-\varDelta)^{-1}[\delta(u_0+z)+\lambda_1(v_0+w)+g(u_0+z,v_0+w)], \end{aligned} \tag{2.6}$$

và

$$\begin{aligned} z &= Q(-\varDelta)^{-1}[\lambda_1(u_0+z)+\delta(v_0+w)+f(u_0+z,v_0+w)], \\ w &= Q(-\varDelta)^{-1}[\delta(u_0+z)+\lambda_1(v_0+w)+g(u_0+z,v_0+w)]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Cố định $(u_0, v_0) \in X \times X$, xét bài toán (2.7). Đặt

$$F_Q(z,w) = (F_Q^{(1)}(z,w), F_Q^{(2)}(z,w)),$$

ở đây

$$F_Q^{(1)}(z,w) := Q(-\Delta)^{-1}[\lambda_1(u_0+z)+\delta(v_0+w)+f(u,v)],$$
$$F_Q^{(2)}(z,w) := Q(-\Delta)^{-1}[\delta(u_0+z)+\lambda_1(v_0+w)+g(u,v)].$$

Bổ đề 2.1. *Nếu*

$$(\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2 < \frac{\lambda_2^2}{2} \tag{2.8}$$

thì F_Q là một ánh xạ co trong $Y \times Y$.

Chứng minh. Giả sử $z, \widetilde{z}, w, \widetilde{w} \in Y$, từ định nghĩa của $F_Q^{(1)}(z,w)$ ta suy ra

$$\begin{aligned}F_Q^{(1)}(z,w) - F_Q^{(1)}(\widetilde{z},\widetilde{w}) =& Q(-\Delta)^{-1}\big(\lambda_1(z-\widetilde{z})+\delta(w-\widetilde{w})\\ &+ f(u_0+z,v_0+w)-f(u_0+\widetilde{z},v_0+\widetilde{w})\big).\end{aligned}$$

Do λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của $-\Delta$ nên

$$\begin{aligned}|F_Q^{(1)}(z,w) - F_Q^{(1)}(\widetilde{z},\widetilde{w})|_2 \le& \frac{1}{\lambda_2}\big(\lambda_1|z-\widetilde{z}|_2+\delta|w-\widetilde{w}|_2\\ &+ |f(u_0+z,v_0+w)-f(u_0+\widetilde{z},v_0+\widetilde{w})|_2\big).\end{aligned}$$

Giả thiết f Lipschitz ta nhận được

$$|f(u_0+z,v_0+w)-f(u_0+\widetilde{z},v_0+\widetilde{w})| \le k(|z-\widetilde{z}|+|w-\widetilde{w}|)$$

nên

$$|f(u_0+z,v_0+w)-f(u_0+\widetilde{z},v_0+\widetilde{w})|^2 \le k^2(|z-\widetilde{z}|+|w-\widetilde{w}|)^2.$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |f(u_0+z,v_0+w)-f(u_0+\widetilde{z},v_0+\widetilde{w})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\qquad\qquad \le k^2\int_\Omega (|z-\widetilde{z}|+|w-\widetilde{w}|)^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

Tức là

$$|f(u_0+z,v_0+w)-f(u_0+\widetilde{z},v_0+\widetilde{w})|_2^2 \le k^2\big||z-\widetilde{z}|+|w-\widetilde{w}|\big|_2^2.$$

Vì

$$\big||z-\widetilde{z}|+|w-\widetilde{w}|\big|_2 \le |z-\widetilde{z}|_2+|w-\widetilde{w}|_2$$

nên

$$|f(u_0+z,v_0+w)-f(u_0+\widetilde{z},v_0+\widetilde{w})|_2 \le k(|z-\widetilde{z}|_2+|w-\widetilde{w}|_2).$$

Vì vậy

$$|F_Q^{(1)}(z,w)-F_Q^{(1)}(\widetilde{z},\widetilde{w})|_2 \le \frac{1}{\lambda_2}((\lambda_1+k)|z-\widetilde{z}|_2+(\delta+k)|w-\widetilde{w}|_2).$$

Và do đó

$$|F_Q^{(1)}(z,w)-F_Q^{(1)}(\widetilde{z},\widetilde{w})|_2^2 \le \frac{2}{\lambda_2^2}((\lambda_1+k)^2|z-\widetilde{z}|_2^2+(\delta+k)^2|w-\widetilde{w}|_2^2).$$

Một cách tương tự ta chứng minh được

$$|F_Q^{(2)}(z,w)-F_Q^{(2)}(\widetilde{z},\widetilde{w})|_2^2 \le \frac{2}{\lambda_2^2}\Big((\delta+k)^2|z-\widetilde{z}|_2^2+(\lambda_1+k)^2|w-\widetilde{w}|_2^2\Big).$$

Kết hợp lại ta đi đến

$$|F_Q(z,w)-F_Q(\widetilde{z},\widetilde{w})|_2^2 \le \frac{2}{\lambda_2^2}\Big((\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2\Big)\Big(|z-\widetilde{z}|_2^2+|w-\widetilde{w}|_2^2\Big).$$

Bổ đề được chứng minh. ■

Sử dụng nguyên lý ánh xạ co ta suy ra với mỗi $(u_0,v_0)\in X\times X$ cố định thì bài toán (2.7) có nghiệm duy nhất $(z_0(u_0,v_0),w_0(u_0,v_0))$. Khẳng định này cho phép chúng ta định nghĩa ánh xạ

$$\begin{aligned}F: X\times X &\to Y\times Y,\\ (u_0,v_0)&\mapsto F(u_0,v_0):=(z_0,w_0),\end{aligned}$$

ở đây (z_0,w_0) là điểm bất động của F_Q.

Bổ đề 2.2. *Nếu*

$$(\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2<\frac{\lambda_2^2}{4} \tag{2.9}$$

thì

$$\begin{aligned}&|F(u_0,v_0)-F(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)|_2^2\\ &\qquad\le \frac{8k^2}{\lambda_2^2-4((\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2)}(|u_0-v_0|_2^2+|\widetilde{u}_0-\widetilde{v}_0|_2^2).\end{aligned} \tag{2.10}$$

với mọi (u_0,v_0) *và* $(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)$ *thuộc* $X\times X$.

Chứng minh. Giả sử rằng $F(u_0, v_0) = (z_0, w_0)$ và $F(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0) = (\widetilde{z}_0, \widetilde{w}_0)$. Từ định nghĩa của F ta đi đến

$$z_0 = Q(-\varDelta)^{-1}[\lambda_1(u_0 + z_0) + \delta(v_0 + w_0) + f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)],$$
$$w_0 = Q(-\varDelta)^{-1}[\delta(u_0 + z_0) + \lambda_1(v_0 + w_0) + g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)],$$

và

$$\widetilde{z}_0 = Q(-\varDelta)^{-1}[\lambda_1(\widetilde{u}_0 + \widetilde{z}_0) + \delta(\widetilde{v}_0 + \widetilde{w}_0) + f(\widetilde{u}_0 + \widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0 + \widetilde{w}_0)],$$
$$\widetilde{w}_0 = Q(-\varDelta)^{-1}[\delta(\widetilde{u}_0 + \widetilde{z}_0) + \lambda_1(\widetilde{v}_0 + \widetilde{w}_0) + g(\widetilde{u}_0 + \widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0 + \widetilde{w}_0)].$$

Bởi vì

$$Q(-\varDelta)^{-1}(u_0) = Q(-\varDelta)^{-1}(v_0) = 0,$$
$$Q(-\varDelta)^{-1}(\widetilde{u}_0) = Q(-\varDelta)^{-1}(\widetilde{v}_0) = 0,$$

nên

$$\begin{aligned}|z_0 - \widetilde{z}_0|_2 \leq& \frac{1}{\lambda_2}\Big(\lambda_1|z_0 - \widetilde{z}_0|_2 + \delta|w_0 - \widetilde{w}_0|_2 \\ &+ |f(u_0 + z_0, v_0 + w_0) - f(\widetilde{u}_0 + \widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0 + \widetilde{w}_0)|_2\Big) \\ \leq& \frac{1}{\lambda_2}\Big((\lambda_1 + k)|z_0 - \widetilde{z}_0|_2 + (\delta + k)|w_0 - \widetilde{w}_0|_2 \\ &+ k(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2)\Big).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}|z_0 - \widetilde{z}_0|_2^2 \leq& \frac{4}{\lambda_2^2}\Big((\lambda_1 + k)^2|z_0 - \widetilde{z}_0|_2^2 + (\delta + k)^2|w_0 - \widetilde{w}_0|_2^2 \\ &+ k^2\big(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2\big)\Big).\end{aligned}$$

Tương tự như vậy

$$\begin{aligned}|w_0 - \widetilde{w}_0|_2^2 \leq& \frac{4}{\lambda_2^2}\Big((\delta + k)^2|z_0 - \widetilde{z}_0|_2^2 + (\lambda_1 + k)^2|w_0 - \widetilde{w}_0|_2^2 \\ &+ k^2\big(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2\big)\Big).\end{aligned}$$

Nghĩa là

$$|z_0 - \widetilde{z}_0|_2^2 + |w_0 - \widetilde{w}_0|_2^2 \leq \frac{4}{\lambda_2^2}\Big(((\delta + k)^2 + (\lambda_1 + k)^2)(|z_0 - \widetilde{z}_0|_2^2 + |w_0 - \widetilde{w}_0|_2^2)$$

$$+\, 2k^2(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2)\Big).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&|z_0 - \widetilde{z}_0|_2^2 + |w_0 - \widetilde{w}_0|_2^2 \\
&\qquad\qquad \leq \frac{8k^2}{\lambda_2^2 - 4((\lambda_1 + k)^2 + (\delta + k)^2)}(|u_0 - v_0|_2^2 + |\widetilde{u}_0 - \widetilde{v}_0|_2^2).
\end{aligned}$$

■

Bây giờ ta xét bài toán (2.6). Đầu tiên do F là một ánh xạ co nên

$$\begin{aligned}
u_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\lambda_1(u_0 + z_0) + \delta(v_0 + w_0) + f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \\
v_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\delta(u_0 + z_0) + \lambda_1(v_0 + w_0) + g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ngoài ra từ định nghĩa của P ta đi đến

$$\begin{gathered}
P(-\Delta)^{-1}(z_0) = P(-\Delta)^{-1}(w_0) = 0, \\
P(-\Delta)^{-1}(\lambda_1 u_0) = u_0, P(-\Delta)^{-1}(\lambda_1 v_0) = v_0,
\end{gathered}$$

và do vậy

$$\begin{aligned}
0 &= P(-\Delta)^{-1}[\delta v_0 + f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \\
0 &= P(-\Delta)^{-1}[\delta u_0 + g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Mặt khác từ định nghĩa của không gian con X

$$P(-\Delta)^{-1}(\delta u_0) = \frac{\delta}{\lambda_1} u_0 \quad , \quad P(-\Delta)^{-1}(\delta v_0) = \frac{\delta}{\lambda_1} v_0.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\lambda_1} v_0 + P(-\Delta)^{-1}[f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \\
0 &= \frac{\delta}{\lambda_1} u_0 + P(-\Delta)^{-1}[g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Tính toán ta thấy (2.13) tương đương với

$$\begin{aligned}
u_0 &= -\frac{\lambda_1}{\delta} P(-\Delta)^{-1}[g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \\
v_0 &= -\frac{\lambda_1}{\delta} P(-\Delta)^{-1}[f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Đặt

$$F_P(u_0, v_0) = (F_P^{(1)}(u_0, v_0), F_P^{(2)}(u_0, v_0)),$$

ở đây

$$F_P^{(1)}(u_0, v_0) := -\frac{\lambda_1}{\delta} P(-\Delta)^{-1}[g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)],$$
$$F_P^{(2)}(u_0, v_0) := -\frac{\lambda_1}{\delta} P(-\Delta)^{-1}[f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)].$$

Bổ đề 2.3. *Nếu* $(\lambda_1 + k)^2 + (\delta + k)^2 < \lambda_2^2/4$ *và*

$$\frac{8k^2}{\delta^2}\Big(1 + \frac{8k^2}{\lambda_2^2 - 4((\delta + k)^2 + (\lambda_1 + k)^2)}\Big) < 1 \tag{2.15}$$

thì F_P *là ánh xạ co trong* $X \times X$.

Chứng minh. Xét $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ in $X \times X$. Theo Bổ đề 2.1 sẽ tồn tại $(\widetilde{z}_0, \widetilde{w}_0)$ trong $Y \times Y$. Từ định nghĩa của $F_P^{(1)}(u_0, v_0)$ chúng ta đi đến

$$F_P^{(1)}(u_0, v_0) - F_P^{(1)}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$$
$$= -\frac{\lambda_1}{\delta} P(-\Delta)^{-1}[g(u_0 + z_0, v_0 + w_0) - g(\widetilde{u}_0 + \widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0 + \widetilde{w}_0)].$$

Sử dụng giả thiết Lipschitz chúng ta nhận được

$$|F_P^{(1)}(u_0, v_0) - F_P^{(1)}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)|_2$$
$$\leq \frac{\lambda_1}{\delta}\frac{1}{\lambda_1}|g(u_0 + z_0, v_0 + w_0) - g(\widetilde{u}_0 + \widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0 + \widetilde{w}_0)|_2$$
$$\leq \frac{k}{\delta}(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2 + |z_0 - \widetilde{z}_0|_2 + |w_0 - \widetilde{w}_0|_2).$$

Theo (2.10) thì

$$|F_P^{(1)}(u_0, v_0) - F_P^{(1)}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)|_2^2$$
$$\leq \frac{4k^2}{\delta^2}\Big(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2 + |z_0 - \widetilde{z}_0|_2^2 + |w_0 - \widetilde{w}_0|_2^2\Big)$$
$$\leq \frac{4k^2}{\delta^2}\Big(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2\Big)$$
$$+ \frac{4k^2}{\delta^2}\frac{8k^2}{\lambda_2^2 - 4((\lambda_1 + k)^2 + (\delta + k)^2)}(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2)$$
$$\leq \frac{4k^2}{\delta^2}\Big(1 + \frac{8k^2}{\lambda_2^2 - 4((\lambda_1 + k)^2 + (\delta + k)^2)}\Big)(|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2).$$

Một cách tương tự

$$
\begin{aligned}
&|F_P^{(2)}(u_0,v_0)-F_P^{(2)}(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)|_2^2\\
&\le \frac{4k^2}{\delta^2}\Big(1+\frac{8k^2}{\lambda_2^2-4((\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2)}\Big)(|u_0-\widetilde{u}_0|_2^2+|v_0-\widetilde{v}_0|_2^2).
\end{aligned}
$$

Vậy

$$
\begin{aligned}
&|F_P(u_0,v_0)-F_P(\widetilde{u}_0,\widetilde{v}_0)|_2^2\\
&\le \frac{8k^2}{\delta^2}\Big(1+\frac{8k^2}{\lambda_2^2-4((\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2)}\Big)(|u_0-\widetilde{u}_0|_2^2+|v_0-\widetilde{v}_0|_2^2).
\end{aligned}
$$

Khẳng định được chứng minh. ■

Định lý 2.10. *Nếu* $(\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2<\lambda_2^2/4$, *và*

$$
\frac{8k^2}{\delta^2}\Big(1+\frac{8k^2}{\lambda_2^2-4((\delta+k)^2+(\lambda_1+k)^2)}\Big)<1,
$$

thì bài toán (2.5) *có nghiệm duy nhất.*

Chứng minh. Chứng minh của định lý được suy ra từ các bổ đề trên. ■

2.4 Kết quả chính

Trong mục này chúng ta xét trường hợp khi ma trận $A-\lambda_1 I$ không suy biến. Để tiện trong việc ký hiệu, đặt

$$
l:=(|\lambda|+k_1)^2+(|\delta|+k_1)^2+(|\theta|+k_2)^2+(|\gamma|+k_2)^2.
$$

Kết quả chính trong chương này là

Định lý 2.11. *Giả sử* λ_1 *không phải là giá trị riêng của ma trận* A. *Ngoài ra ta giả thiết thêm* $l<\lambda_2^2/2$ *và*

$$
\frac{4(k_1^2+k_2^2)\big((\lambda_1-\lambda)^2+(\lambda_1-\gamma)^2+\theta^2+\delta^2\big)}{((\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta)^2}\Big(1+\frac{4(k_1^2+k_2^2)}{\lambda_2^2-2l}\Big)<1.
$$

Khi đó bài toán (2.1) *có nghiệm duy nhất* (u,v) *trong* $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Để chứng minh Định lý 2.11 ta cần các bổ đề bổ trợ sau đây.

Bổ đề 2.4. *Với mỗi* $(u_0, v_0) \in X \times X$ *cố định nếu* $l < \lambda_2^2$ *thì bài toán (2.4) có nghiệm duy nhất* $(z_0, w_0) \in Y \times Y$.

Chứng minh bổ đề này tương tự như chứng minh của bổ đề 2.1. Kết quả của bổ đề trên cho phép ta xây dựng ánh xạ

$$T : X \times X \to Y \times Y,$$
$$(u_0, v_0) \mapsto T(u_0, v_0) := (z_0, w_0),$$

ở đây (z_0, w_0) là nghiệm duy nhất của bài toán (2.4).

Bổ đề 2.5. *Nếu* $l < \lambda_2^2/2$ *thì*

$$|T(u_0, v_0) - T(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)|_2^2 \leq \frac{4(k_1^2 + k_2^2)}{\lambda_2^2 - 2l}\big(|u_0 - v_0|_2^2 + |\widetilde{u}_0 - \widetilde{v}_0|_2^2\big). \tag{2.16}$$

Chứng minh bổ đề này tương tự như chứng minh của Bổ đề 2.2.

Bổ đề 2.6. *Nếu* $l < \lambda_2^2/2$ *và*

$$\frac{4(k_1^2 + k_2^2)((\lambda_1 - \lambda)^2 + (\lambda_1 - \gamma)^2 + \theta^2 + \delta^2)}{((\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 - \gamma) - \theta\delta)^2}\Big(1 + \frac{4(k_1^2 + k_2^2)}{\lambda_2^2 - 2l}\Big) < 1 \tag{2.17}$$

thì bài toán (2.3) có nghiệm duy nhất trong $X \times X$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 2.4 ta suy ra

$$\begin{aligned} u_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\lambda(u_0 + z_0) + \delta(v_0 + w_0) + f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \\ v_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\theta(u_0 + z_0) + \gamma(v_0 + w_0) + g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Mặt khác do P là phép chiếu nên

$$\begin{aligned} u_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\lambda u_0 + \delta v_0 + f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \\ v_0 &= P(-\Delta)^{-1}[\theta u_0 + \gamma v_0 + g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \end{aligned} \tag{2.19}$$

tức là

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\lambda}{\lambda_1}u_0 + \frac{\delta}{\lambda_1}v_0 + P(-\Delta)^{-1}[f(u_0 + z_0, v_0 + w_0)], \\ v_0 &= \frac{\theta}{\lambda_1}u_0 + \frac{\gamma}{\lambda_1}v_0 + P(-\Delta)^{-1}[g(u_0 + z_0, v_0 + w_0)]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Giả hệ phương trình (2.20) ta nhận được

$$u_0 = \frac{\lambda_1(\lambda_1-\gamma)P(-\Delta)^{-1}[f] + \lambda_1\delta P(-\Delta)^{-1}[g]}{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta} =: F_P^{(1)}(u_0, v_0),$$
$$v_0 = \frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda)P(-\Delta)^{-1}[g] + \lambda_1\theta P(-\Delta)^{-1}[f]}{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta} =: F_P^{(2)}(u_0, v_0).$$

Và do đó

$$\begin{aligned}
&F_P^{(1)}(u_0, v_0) - F_P^{(1)}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)\\
&= \frac{\lambda_1(\lambda_1-\gamma)}{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta} P(-\Delta)^{-1}[f(u_0+z_0, v_0+w_0) - f(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)]\\
&+ \frac{\lambda_1\delta}{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta} P(-\Delta)^{-1}[g(u_0+z_0, v_0+w_0) - g(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)].
\end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned}
&|F_P^{(1)}(u_0, v_0) - F_P^{(1)}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)|_2\\
&\le \frac{|\lambda_1-\gamma|}{|(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta|} |f(u_0+z_0, v_0+w_0) - f(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)|_2\\
&\quad + \frac{|\delta|}{|(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta|} |g(u_0+z_0, v_0+w_0) - g(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)|_2.
\end{aligned}$$

Một cách tương tự

$$\begin{aligned}
&|F_P^{(2)}(u_0, v_0) - F_P^{(2)}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)|\\
&\le \frac{|\lambda_1-\lambda|}{|(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta|} |f(u_0+z_0, v_0+w_0) - f(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)|_2\\
&\quad + \frac{|\theta|}{|(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta|} |g(u_0+z_0, v_0+w_0) - g(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)|_2.
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
|F_P(u_0, v_0) - F_P(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)|_2^2
&\le \frac{(\lambda_1-\gamma)^2 + (\lambda_1-\lambda)^2 + \delta^2 + \theta^2}{((\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma)-\theta\delta)^2}\\
&\quad \Big(|f(u_0+z_0, v_0+w_0) - f(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)|_2^2\\
&\qquad + |g(u_0+z_0, v_0+w_0) - g(\widetilde{u}_0+\widetilde{z}_0, \widetilde{v}_0+\widetilde{w}_0)|_2^2\Big),
\end{aligned}$$

ở đây

$$F_P(u_0, v_0) = (F_P^{(1)}(u_0, v_0), F_P^{(2)}(u_0, v_0)).$$

Sử dụng tính Lipschitz chúng ta nhận được

$$
\begin{aligned}
&|F_P(u_0, v_0) - F_P(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)|_2^2 \\
&\le 4(k_1^2 + k_2^2)\frac{(\lambda_1-\gamma)^2 + (\lambda_1-\lambda)^2 + \delta^2 + \theta^2}{((\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\gamma) - \theta\delta)^2}\Big(1 + \frac{4(k_1^2+k_2^2)}{\lambda_2^2 - 2l}\Big) \\
&\quad \times (|u_0 - \widetilde{u}_0|_2^2 + |v_0 - \widetilde{v}_0|_2^2).
\end{aligned}
$$

Khẳng định được chứng minh. ■

Chứng minh (Định lý 2.11). Chứng minh của Định lý 2.11 hoàn toàn tương tự như chứng minh của Định lý 2.10 và do đó ta không trình bày lại. ■

2.5 Một số ví dụ

2.5.1 Trường hợp một chiều

Xét bài toán (2.5) trong trường hợp một chiều, ở đây $\Omega = (0, 1)$.

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \pi^2 u + \pi^2 v + f(u, v) \quad \text{trong } \Omega, \\
-\Delta v &= \pi^2 u + \pi^2 v + g(u, v) \quad \text{trong } \Omega, \\
u &= v = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

trong đó f và g là các hàm Lipschitz với hằng số Lipschitz $k = \frac{\pi^2}{4}$. Ta biết rằng trong miền $\Omega = (0, 1)$ toán tử $-\Delta$ nhận

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad , \quad n \ge 1$$

làm các giá trị riêng, tương ứng với nó là các véc tơ riêng

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x) \quad , \quad n \ge 1.$$

Như vậy

$$\lambda_1 = \pi^2 \quad , \quad \lambda_2 = 4\pi^2.$$

Ta kiểm tra các điều kiện của Định lý 2.10. Thật vậy ta thấy

$$(\lambda_1 + k)^2 + (\delta + k)^2 = \left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^2 + \left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)^2 = \frac{50}{16}\pi^4 \le 4\pi^4 = \frac{\lambda_2^2}{4}$$

và

$$\frac{8k^2}{\delta^2}\left(1+\frac{8k^2}{\lambda_2^2-4\left((\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2\right)}\right)$$
$$=\frac{8\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^2}{\left(\pi^2\right)^2}\left(1+\frac{8\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^2}{16\pi^4-\frac{50}{4}\pi^4}\right)=\frac{\frac{1}{2}\pi^4}{\pi^4}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\pi^4}{\frac{14}{4}\pi^4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{28}\right)<1.$$

Vậy theo Định lý 2.10 bài toán (2.21) có nghiệm duy nhất.

2.5.2 Trường hợp nhiều chiều

Xét bài toán (2.5) trong trường hợp hai chiều, ở đây $\Omega=(0,1)\times(0,1)$.

$$\begin{aligned}-\Delta u &= \pi^2 u+\pi^2 v+f(u,v) \quad \text{trong } \Omega,\\ -\Delta v &= \pi^2 u+\pi^2 v+g(u,v) \quad \text{trong } \Omega,\\ u &= v=0 \quad \text{trên } \partial\Omega,\end{aligned} \tag{2.22}$$

trong đó f và g là các hàm Lipschitz với hằng số Lipschitz $k=\frac{\pi^2}{4}$. Ta biết rằng trong miền $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ toán tử $-\Delta$ nhận

$$\lambda_{m,n}=\pi^2\left(m^2+n^2\right) \quad , \quad \forall m,n\geq 1$$

làm các giá trị riêng, tương ứng với nó là các véc tơ riêng

$$\varphi_{m,n}(\mathbf{x})=2\sin(m\pi\mathbf{x})\sin(n\pi\mathbf{x}) \quad , \quad \forall m,n\geq 1.$$

Như vậy

$$\lambda_1=2\pi^2 \quad , \quad \lambda_2=5\pi^2.$$

Ta kiểm tra các điều kiện của Định lý 2.10. Thật vậy ta thấy

$$(\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2=\left(2\pi^2+\frac{\pi^2}{4}\right)^2+\left(\pi^2+\frac{\pi^2}{4}\right)^2=\frac{61}{16}\pi^4\leq\frac{25}{4}\pi^4=\frac{\lambda_2^2}{4}$$

và

$$
\begin{aligned}
&\frac{8k^2}{\delta^2}\left(1+\frac{8k^2}{\lambda_2^2-4\left((\lambda_1+k)^2+(\delta+k)^2\right)}\right)\\
&\qquad\qquad = \frac{8\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^2}{\left(\pi^2\right)^2}\left(1+\frac{8\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^2}{25\pi^4-\frac{61}{4}\pi^4}\right) = \frac{\frac{1}{2}\pi^4}{\pi^4}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\pi^4}{\frac{39}{4}\pi^4}\right)\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{39}\right) < 1.
\end{aligned}
$$

Vậy theo Định lý 2.10 bài toán (2.21) có nghiệm duy nhất.