TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ MÔN GIẢI TÍCH I

★★★★★ ★★★★★

Đối tượng dự thi: $\mathbf{A_1T, A_2, A_3, A_1S, A_1C}$ **- K52**
Thời gian làm bài: **120 phút**

Đề số 1

Câu 1.

1. Dùng định nghĩa giới hạn dãy số hãy chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ ở đây $a > 1$.

2. Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số hội tụ. Hãy chứng minh rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn và có giới hạn duy nhất.

3. (a) Chứng minh sự hội tụ của dãy số
$$a_n = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^n}\right), n = 1, 2, ..$$
   (b) Tìm $\overline{\lim} a_n$, $\underline{\lim} a_n$ của dãy số
$$a_n = \left(\cos\frac{2n\pi}{3}\right)^n, n = 1, 2, ...$$

Câu 2.

1. (a) Chứng minh rằng hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì bị chặn trên đoạn đó.
   (b) Giả sử hàm $f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng vô hạn $[a, +\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. Chứng minh rằng hàm số $f(x)$ bị chặn trong khoảng $[a, +\infty)$.

2. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^\alpha} & \text{với } x \neq 0, \\ 1 & \text{với } x = 0, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
   Hãy xác định giá trị của α sao cho
   a) Hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
   b) Hàm $f(x)$ gián đoạn loại I tại $x = 0$.
   c) Hàm $f(x)$ gián đoạn loại II tại $x = 0$.

Câu 3.

1. Cho hàm $f(x)$ xác định trong khoảng I, khả vi tại $x_0 \in I$. Chứng minh công thức số gia
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\, h + o(h)$$
   trong đó $o(h)$ là vô cùng bé khi $h \to 0$.

2. Phát biểu và chứng minh định lý Fermat về hàm khả vi.

3. Giả sử $f(x)$ là hàm khả vi trong khoảng (a, b) có đạo hàm $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Chứng minh rằng hàm $f(x)$ đơn điệu trong khoảng (a, b).

Ghi chú: Thí sinh ***không được phép*** *sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không cần phải giải thích gì thêm.*