

Đối tượng dự thi: $A_1T, A_2, A_3, A_1S, A_1C - K52$

Thời gian làm bài: 120 phút

Đề số 2

Câu 1.

1. Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. Chứng minh rằng

(a) Mọi dãy con $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ đều hội tụ và cũng có giới hạn a .

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$.

Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |a|$ thì có suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ được không? Cho ví dụ?

2. Định nghĩa giới hạn trên, giới hạn dưới của dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ khi và chỉ khi $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$.

Câu 2.

1. Chứng minh rằng hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nhận giá trị lớn nhất và bé nhất trên đoạn đó.

2. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. Cho hàm $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ với $0 < |x| < 1$. Xét tính liên tục đều của hàm $f(x)$ trong các khoảng $(-1, 0)$, $(0, 1)$, và trong tập hợp $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Câu 3.

1. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{với } x \neq 0, \\ 0 & \text{với } x = 0, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Hãy xác định giá trị của α để cho hàm số $f(x)$

a) liên tục tại $x = 0$,

b) có đạo hàm tại $x = 0$,

c) có đạo hàm $f'(x)$ liên tục tại $x = 0$.

2. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

b) $g(x) = \sin 2x \cdot \sin 4x$.

3. Áp dụng khai triển Taylor hãy tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$.