

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ, ĐỀ SỐ 1

Môn học: Giải tích 3  
Số đơn vị học trình: 3  
Đối tượng dự thi: **K51-A1T, A1S và Toán Tin**  
Thời gian làm bài: **120 phút**

**Câu 1.**

1. Định nghĩa lân cận của một điểm, điểm tụ của một tập hợp trong  $\mathbb{R}^N$ . Định nghĩa giới hạn, giới hạn lặp của một hàm hai biến. Phát biểu và chứng minh định lý về mối quan hệ giữa chúng.
2. Tìm giới hạn và các giới hạn lặp tại điểm  $(0, 0)$  của hàm số

$$u = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

**Câu 2.**

1. Định nghĩa hàm khả vi nhiều biến. Phát biểu và chứng minh định lý về điều kiện cần để một hàm khả vi có liên quan đến đạo hàm riêng. Cho một ví dụ về một hàm khả vi có các đạo hàm riêng nhưng không khả vi tại một điểm nào đó.
2. Xét tính liên tục và khả vi của đạo hàm

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{nếu } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = y = 0. \end{cases}$$

**Câu 3.**

1. Định nghĩa chuẩn trên một không gian tuyến tính. Cho  $A$  là một tập trong  $\mathbb{R}^N$ ,  $\|\cdot\|$  là một chuẩn trên  $\mathbb{R}^N$ . Gọi

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Chứng minh rằng

$$|\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq \|x - z\|$$

với mọi  $x, z$  đều thuộc  $\mathbb{R}^N$ .

2. Tìm cực trị của hàm số

$$z = x^2 + y^2 + xy - 4 \ln x - 10 \ln y.$$