TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

ĐỀ THI HỌC KỲ I NĂM HỌC 2008 - 2009

Môn học:	Giải Tích 1
Đối tượng dự thi:	K53 A1C, A1S, A2, A3
Thời gian làm bài:	120 phút *(không kể thời gian phát đề)*
Đề số:	**1**

Câu I. (3 điểm)

1. Hãy nêu định nghĩa dãy số thực hội tụ. Chứng minh rằng nếu dãy số thực $\{a_n\}$ hội tụ và $a_n < b$ với mọi $n \geqslant 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant b$.
2. Dùng trực tiếp định nghĩa giới hạn dãy số, hãy chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.
3. Cho dãy số $\{a_n\}_n$ được xác định bởi công thức truy hồi sau:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{2a_{n-1}+1}{5} \; (n = 2, 3, ...).$$

Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}_n$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu II. (4 điểm)

1. Phát biểu và chứng minh tiêu chuẩn Cauchy đối với sự tồn tại giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.
2. a) Dùng trực tiếp định nghĩa giới hạn, hãy chứng minh rằng: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(1-x)} = -\infty$.

   b) Tìm các giới hạn sau:

$$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt[4]{1-x} - 1}; \qquad ii)\ \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x}\right)^{x-\sin x}.$$

3. Giả sử rằng hàm số f liên tục trên $[0, +\infty)$ và giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ tồn tại hữu hạn. Chứng minh rằng f liên tục đều trên $[0, +\infty)$.

Câu III. (3 điểm)

1. Cho hàm số $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} & \text{nếu } \; x \in (0, \pi), \\ a\cos x + b\sin x & \text{nếu } \; x \in (-\pi, 0]. \end{cases}$$

Hãy tìm điều kiện của a và b sao cho hàm số f:

   a) liên tục trong khoảng $(-\pi, \pi)$.

   b) khả vi trong khoảng $(-\pi, \pi)$. Trong trường hợp này, đạo hàm f' có liên tục trong khoảng $(-\pi, \pi)$ không, tại sao?

2. a) Hãy phát biểu công thức khai triển Taylor với số dư dạng Lagrange.

   b) Hãy khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{1+x^2}$:

   i) theo lũy thừa nguyên dương của x đến số hạng chứa x^4.

   ii) theo lũy thừa nguyên dương của $(x-1)$ đến số hạng chứa $(x-1)^4$.

Hết

Ghi chú: *Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu nào.*